

Legjobb valódi hengervetület nagy területek ábrázolására

Kerkovits Krisztián

Bevezetés

A számítógépes kartográfia elterjedésével sokkal könnyebbé vált térképünk vetületének tetszés szerinti meghatározása, a mű alaptérképének másik vetületbe transzformálása, így a geokartográfiában előtérbe került a vetületválasztás témaköre. Könnyen megoldhatóvá vált a térképi ábrázolás szempontjából optimális vetületek használata. A következőkben bemutatom, hogy a valódi hengervetületek népes családjából hogyan lehet matematikai módszerekkel az ábrázolás céljának legmegfelelőbb (lehető legkisebb torzulású) vetületet kiválasztani kis méretarányú földrész- vagy világ-térképek számára.

1. A valódi hengervetületekről

Valódi hengervetületnek nevezzük azt a merőleges fokhálózati képpel rendelkező vetületet, amelyben a paralelkörök párhuzamos egyenesekre képződnek le; a meridiánok képei pedig a paralelkörök képeire merőleges, párhuzamos egyenesek, melyek a hosszúságkülönbséggel arányosan helyezkednek el (Hazay 1964, Györfly 2012). Általában elvárjuk, hogy a paralelkörök az Egyenlítőre szimmetrikusan helyezkedjenek el.

Leginkább időzónatérképen célszerű alkalmazni ilyen vetületet, mert ebben ábrázolva az időzónák közel függőleges sávokra képződnek le. További előnye a vetületcsaládnak, hogy téglalapkontúrba képi le a földfelszín, így a jellemzően téglalap alakú térképtükröt teljesen ki lehet vele tölteni. Manapság a nyomtatott világtérképet inkább kedvezőbb torzulásokkal rendelkező képzetes vetületekben szokás megjeleníteni.

A webkartográfiában azonban a vetületcsalád renszanszát éli. Mivel a 180°-os meridián egyenesre képződik le, a raszteres térkép egyszerű ismétlésével

a térkép tovább folytatható. Így az ábrázolás folytonossága nem szakad meg. Ezt a tulajdonságot számos raszteres térképet szolgáltató térképszerver kihasználja, és az adatokat valamely valódi (jellemzően Mercator vagy négyzetes) hengervetületben szolgáltatja.

Szintén érdemes valódi hengervetületeket alkalmazni az Egyenlítőre szimmetrikus területek regionális térképezéséhez, különösen akkor, ha az ábrázolni kívánt terület észak-déli kiterjedése jóval kisebb, mint a keletnyugati. (Példa a Csendes-óceáni szigetvilág.) Transzverzális vagy ferde-tengelyű elhelyezésben a vetületcsalád bármely gömbi főkör mentén elhelyezkedő területre jó választás lehet (közismert példa az EOVS).

A térképrajzoló már az ókori görögök idején kitűzte célul, hogy az ábrázolandó területet a lehető leginkább alakhűen mutassa be (Klinghammer 2015). Ennek megfelelően a vetület-tani kutatás célja a mai napig a térképen található torzulások csökkentése. A valódi hengervetületek esetében is a paramétereket megfelelően kell megválasztanunk, hogy az ábrázolás szempontjából a lehető legkevésbé legyenek zavaróak a torzulások.

A valódi hengervetületek között egyaránt találunk szögtartó és területtartó leképezéseket. Mind a szögtartó, mind a területtartó hengervetületnek választhatunk egy torzulásmentes paralelkört. Hol érdemes ezt felvenni?

Érdekes módon az a tapasztalat, hogy több különböző tulajdonsággal rendelkező valódi hengervetületet (szögtartó, területtartó vagy meridiánban hossz-tartó) ugyanazon területre alkalmazva a torzulásmentes paralelkör optimális helye megegyezik (Frančula 1971). Számításaim egyik célja bizonyítani, hogy a tapasztalatoknak megfelelően a legjobb valódi hengervetületek normálpárhuzamosok optimális elhelyezése valóban csak az ábrázolandó terület függvénye, független a vetület más tulajdonságaitól.

Ha az ábrázolt téma sem szögtartást, sem területtartást nem követel meg, érdemes valamely általános torzulású vetületet választanunk. Milyen vetületet érdemes azonban akkor választani, ha szabályozni szeretnénk a térképen fellépő terület- és szögtorzulások arányát? Például előfordulhat, hogy azt szeretnénk, a vetületünk közel területtartó legyen, de ebből hajlandóak vagyunk valamennyit feladni, hogy a szögtorzulást kissé csökkentsük. Így tehát írásom másik célja olyan optimális hengervetület létrehozása, melyben meghatározható a szög- és területtorzulás „nemkívánatossága”.

2. A valódi hengervetületek torzultsága

A kis méretarány miatt a gömb és az ellipszoid közötti különbséget elhanyagolhatjuk, hiszen a nyomdai pontosságánál kisebb távolságokat a generalizálás során úgysem vesszük figyelembe. Legyen φ a gömbi szélesség, φ_n a hossz-tartó paralelkör szélessége, $\Delta\lambda$ az alkalmazott középmeridiántól vett hosszúságkülönbség. Az x és y koordinátákat a geodéziai gyakorlattól eltérően a matematikában szokásos módon vesszük fel. Minden képletben a szögek radiánban, a koordináták egység-sugarú gömbre vonatkozóan és egységnyi méretarányban értendők! Így a gömb-alapfelületű valódi hengervetületek általános alakban felírhatóak a következőképpen:

$$x = \cos \varphi_n \Delta\lambda \quad (1)$$

$$y = y(\varphi) \quad (2)$$

ahol $y(\varphi)$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő, kétszer differenciálható, páratlan függvény. A fokhálózat menti torzulások (h a paralelkör, k a meridián menti):

$$h = \cos \varphi_n / \cos \varphi \quad (3)$$

$$k = dy / d\varphi \quad (4)$$

Egy vetület lokális torzultságának nevezzük azt a mérőszámot, amely a térkép egy adott pontjában a torzulásmentes állapottól vett eltérést jellemzi.

A torzulási modulusoktól eltérően a torzulásmentes pontokban a vetület torzultsága zérus. Ezt valamilyen $\varepsilon^2(a, b)$ mérőszámmal szokás jellemezni, ahol a és b a vetületi főirányok mentén föllepő maximális és minimális hossztorzulások, egyben az ún. torzulási ellipszis féltengelyei. Az első ilyen számot *Airy (1861)* készítette, később több térképész tovább finomított rajta. Így számtalan $\varepsilon^2(a, b)$ függvény közül választhatunk a térképi torzulások minősítéséhez. Merőleges fokhálózatú vetületekben a fokhálózati vonalak vetületi főirányok, ezért az a és b maximális, ill. minimális hossztorzulások megegyeznek a fokhálózat menti torzulásokkal, így ebben az esetben a torzultság $\varepsilon^2(h, k)$ alakban is fölírható.

Bajeva (1987) kimutatta, hogy a Kavrajcskij-típusú mérőszámok a legalkalmasabbak arra, hogy súlyozzuk a terület- és szögtorzultság (azaz a terület-, ill. szög tartástól vett eltérés) mértékét. Ezek rendre (*Kavrajcskij, 1934*):

$$(5)$$

$$\varepsilon_t^2 := \ln^2(kh) = \ln^2(dy/d\phi \cdot \cos \phi_n / \cos \phi)$$

$$(6)$$

$$\varepsilon_i^2 := \ln^2(k/h) = \ln^2(dy/d\phi \cdot \cos \phi / \cos \phi_n)$$

A felvetett problémának megfelelően a legjobb valódi hengervetületet úgy szeretném meghatározni, hogy tudjuk szabályozni a szögek és területek torzultságának arányát. A területtorzultság súlya legyen ennek megfelelően $0 \leq p \leq 1$, és a szögtorzultságé $1 - p$.

$$\varepsilon^2 := p \ln^2 \frac{\cos \phi_n \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi} + (1-p) \ln^2 \frac{\cos \phi \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi_n} \quad (7)$$

Arra is több lehetőségünk van, hogy a lokális torzultsági mérőszámunkat az egész térképre vonatkoztassuk. Az ún. minimax-elv esetén a térkép területén fellépő legnagyobb ε^2 torzultsággal jellemezzük a vetületet. Ennek alkalmazása esetén azt a vetületet tekintjük legjobbnak, ahol a torzultságok szélsőértéke a legkisebb. Míg a topokartográfiában gyakran alkalmazzuk ezt a módszert, a geokartográfiában már kevésbé szerencsés ezt használni, hiszen néhány amúgy kedvező tulajdonságú vetület torzultsága a pólusokban végtelen.

Čapek (2001) a minimax-elv gondolatmenetével előre meghatározza a

maximális tolerálható torzultság mértékét, majd megvizsgálja, hogy a vetület az ábrázolandó terület hány százalékában teljesíti előzetes elvárásainkat. Ennek hátránya, hogy a még tolerálható torzultság mértékét „testre kell szabni” az adott területre és torzultsági mérőszámra, hogy megfelelő eredményt kapjunk.

Kézenfekvő megoldás a torzultságok átlagát (integrálközepét) megjelölni, mint a globális torzultság. {Ez volt *Airy (1861)* módszere is.} Így azt a vetületet tekintjük a legjobbnak, ahol az

$$E^2 := 1/\mu(T) \int_T \varepsilon^2 dT \quad (8)$$

integrál minimális. $\{\mu(T)$ a T felület felszíne.} Mivel ez a variációs számítás egyik alapfeladatára vezet, ezt a módszert variációs elvnek nevezzük. Jelen munka ezt használja a legjobb vetület megkeresésére. Az improprius és végtelenbe divergáló integrálok elkerülése érdekében a felületi integrált nem szokás a pólus környéki területekre számolni. A teljes Föld ábrázolása esetén jellemző választás, hogy a 85° -nál magasabb szélességeket nem vesszük figyelembe.

Valódi hengervetületeket az Egyenlítőre szimmetrikus gömbövon célszerű alkalmazni. Legyen a gömböv északi határoló szélessége ϕ_H . Ekkor a felületi integrál a gömbövre a (7) képlettel megadott mérőszámmal számolva:

$$(9)$$

$$E^2 = \frac{1}{2 \sin \phi_H} \int_{-\phi_n}^{\phi_n} \left(p \ln^2 \frac{\cos \phi_n \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi} + (1-p) \ln^2 \frac{\cos \phi \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi_n} \right) \cos \phi d\phi$$

Megjegyzendő, hogy a továbbiakban ϕ_H nem az ábrázolandó terület határát, hanem csak az optimálisan ábrázolni kívánt terület határát jelöli. Ennélfogva lehetséges, hogy az elkészített térképen ábrázolunk magasabb szélességeket is, de az optimális torzulásokat kisebb területen kívánjuk tartani.

3. A legjobb valódi hengervetület egyenlete

E^2 minimalizálását variációs számítással lehet megoldani. A (9) egyenlet integrandusát egy $f(y', \phi)$ függvénnyel jelölöm, ahol $y' = dy/d\phi$. Ekkor fölírható az Euler-Lagrange-differenciálegyenlet (*Kósa 1970*), mely szerint E^2 csak akkor lehet minimális, ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (10)$$

Mivel f nem függ y -től, csak annak deriváltjától, így az első tag nulla. Ebből következik, hogy a második tag is nulla. Az a differenciálhányados azonban csak akkor lehet nulla, ha

$$\partial f / \partial y' \equiv \text{const.} \quad (11)$$

Egy másik szükséges feltétel a transzverzálitás (*Kósa 1970*), melynek jelen esetben egy egyszerűbb alakját is föl lehet írni. E szerint E^2 csak olyan f integrandus esetén lehet minimális, melyre

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{\phi=\phi_n} = 0 \quad (12)$$

A két feltétel együtt csak akkor teljesülhet, ha

$$\partial f / \partial y' \equiv 0 \quad (13)$$

A deriválást elvégezve:

$$\frac{2 \cos \phi}{\frac{dy}{d\phi}} \left(p \ln \frac{\cos \phi_n \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi} + (1-p) \ln \frac{\cos \phi \frac{dy}{d\phi}}{\cos \phi_n} \right) = 0 \quad (14)$$

Egyszerűsítve:

$$\frac{dy}{d\phi} = \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi_n} \right)^{2p-1} \quad (15)$$

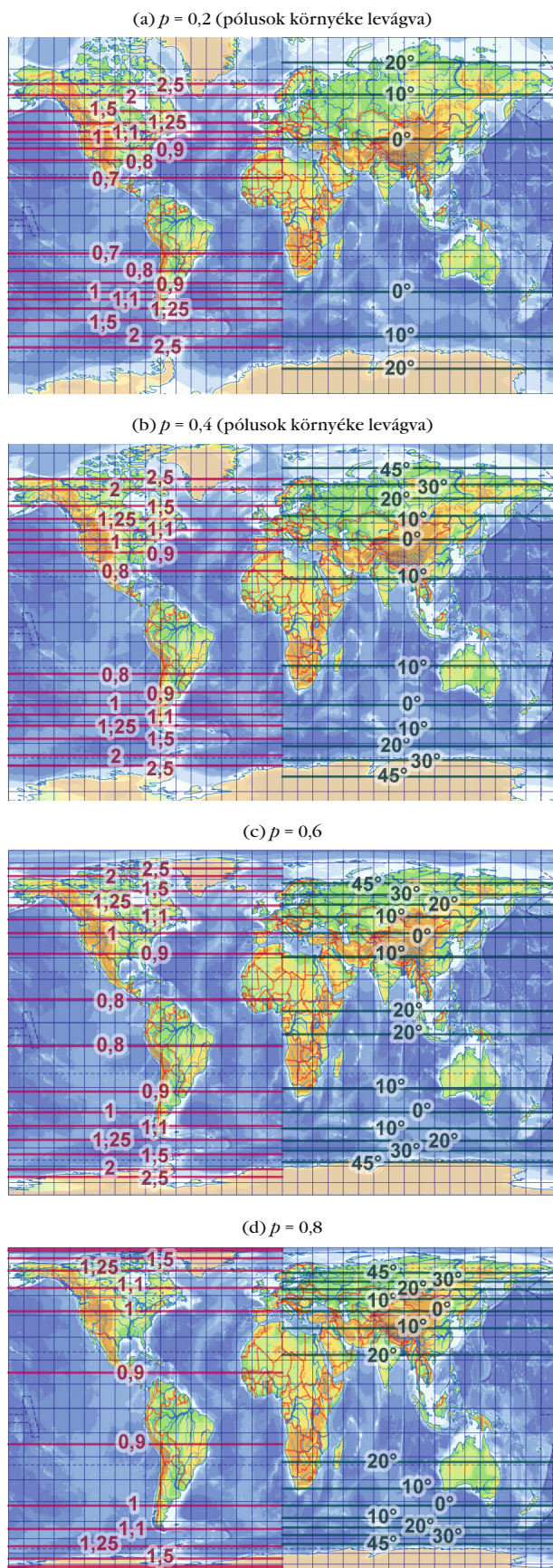
Máris világosan látszik a vetület néhány tulajdonsága: ϕ_n nemcsak hosszstartó, de torzulásmentes paralelkör is, hiszen a meridián menti hossztorzulás, azaz y deriváltja itt 1. A kifejezést deriválva és $d^2y/d\phi^2$ előjelét vizsgálva megállapítható, hogy ha $(2p - 1)$ negatív, akkor a paralelkörök az Egyenlítőtől távolodva ritkulnak. Ebben az esetben a pólusban a meridián menti hossztorzulás végtelen. Ha $(2p - 1)$ pozitív, akkor viszont a paralelkörök a pólusok irányába sűrűsödnek.

A (15) differenciálegyenlet megoldása (felhasználva, hogy $y(0) = 0$):

$$(16)$$

$$y = \cos^{1-2p} \phi_n \int_0^\phi \cos^{1-2p} \phi d\phi$$

Sajnos az integrál csak speciális p -k esetén fejezhető ki analitikusan. Könnyen belátható, hogy $p = 0$ esetén Mercator vetületét kapjuk, de nem az Egyenlítő, hanem valamely más paralelkör lesz hosszstartó. $p = 1$ esetben az eredmény egy területtartó valódi hengervetület. $p = 1/2$ választása esetén a meridiánban hosszstartó vetületet kapjuk meg. (*Györffy, 1990*) Más p -kre numerikus integrálással tudjuk a legjobb vetületet közelíteni.



1. ábra. Legjobb valódi hengervetületek p függvényében ($\varphi_H = 85^\circ$)

Fontos azonban megjegyezni, hogy $0 < p < 1/2$ esetén a pólusvonal y koordinátája improprius integrállal kapható meg. Ez ugyan kifejtethető

analitikusan, de a gamma függvény szükséges annak kiszámításához, így numerikus közelítése célszerűbb. Ebben az esetben érdemes megfontolni, hogy a pólusok környékét ne is ábrázoljuk, ugyanis ahogy p -t csökkentjük, a pólusvonal rohamosan távolodik az Egyenlítőtől. A vetület képe a területtorzulási (lila) és maximális szögmegváltozási (zöld) izovonalakkal $\varphi_H = 85^\circ$ választása mellett az 1. ábrán látható.

4. A normálparallelkör elhelyezkedése

Ismeretlen még a φ_n normálparallelkör. Tudjuk, hogy E^2 csak akkor lehet minimális, ha

$$\partial E^2 / \partial \varphi_n = 0 \quad (17)$$

A (15) egyenletből $y'(\varphi)$ -t a (9) egyenletbe helyettesítve, majd az integráljel alá deriválva

$$-2 \operatorname{tg} \varphi_n \int_{-\varphi_n}^{\varphi_n} \cos \phi \ln \frac{\cos \phi_n}{\cos \phi} d\phi = 0 \quad (18)$$

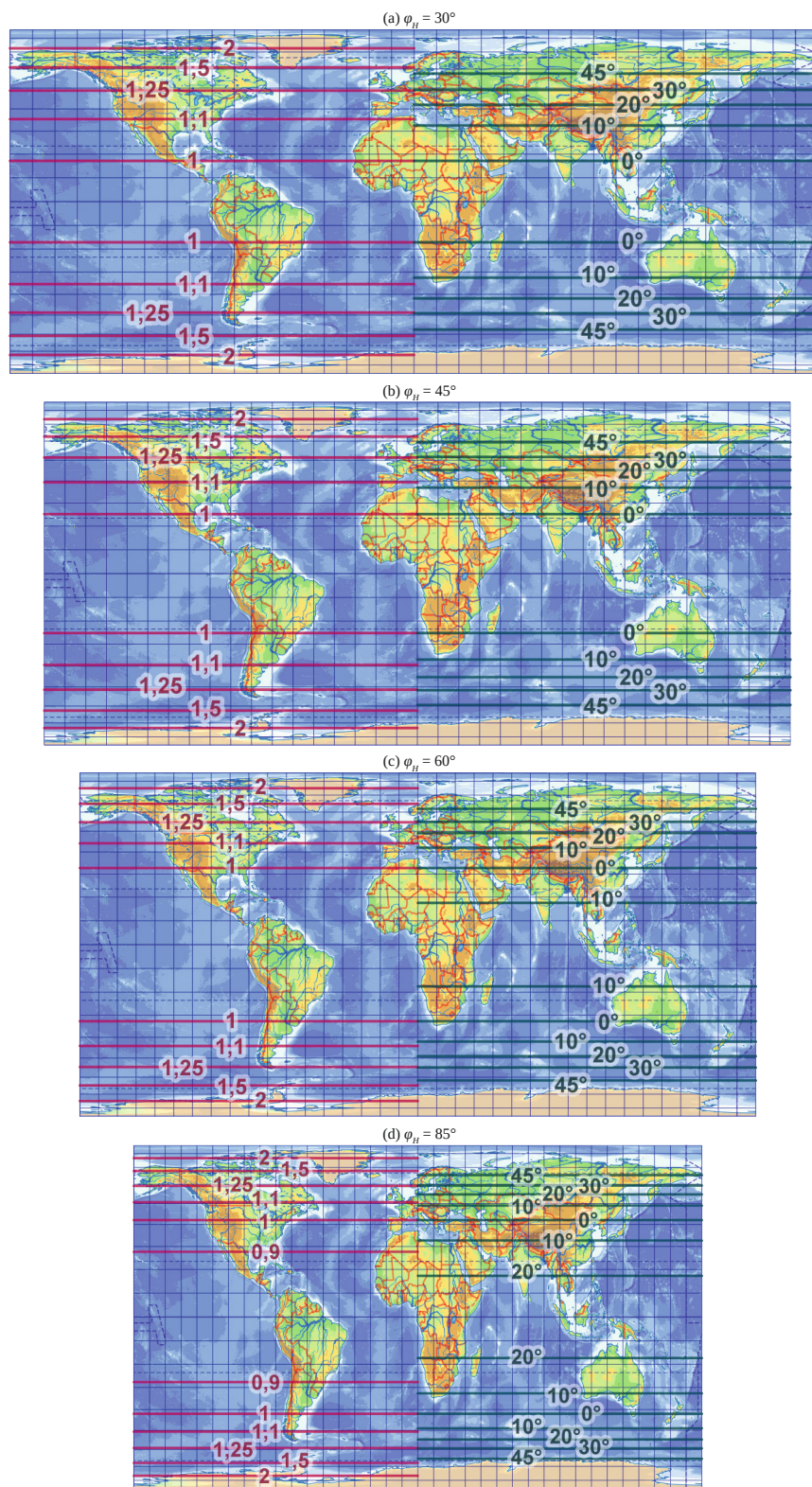
Az egyenletnek $\varphi_n = 0$ is gyöke, de ez épp E^2 maximumhelyét adja. A levezetést mellőzve az egyenlet másik gyöke, amely E^2 minimumhelye:

$$\ln \cos \varphi_n = \ln \cos \varphi_H - 1 + \ln \operatorname{tg}(\pi / 4 + \varphi_H / 2) / \sin \varphi_H \quad (19)$$

Ennek értelmében sikerült belátni, hogy φ_n optimális értéke valóban kizárólag φ_H függvénye, p -tól független. (Grafarend-Niermann, 1984) Az (1), (16) és (19) egyenletek már egyértelműen megadják a legjobb vetületet. A 2. ábrán megfigyelhető, hogy a vetület megjelenése hogyan változik az optimális torzulású gömböv függvényében. (A lila és zöld izovonalak itt is rendre a területtorzulást és a maximális szögmegváltozást jelölik.)

Érdekesség, hogy teljes Föld ábrázolása esetén az optimális normálparallelkör a sokat kritizált Gall-Peters- és a Hobo-Dyer-vetületek választásához áll közel.

A $p = 0$ és $p = 1$ (szögtartó vagy területtartó) választáskor kapott vetületet $\varphi_H = 85^\circ$ (tehát teljes Föld ábrázolása) esetén a nagyközönség számára ebben a formában nem ajánlom. Ha igény van a teljes földfelszín területtartó leképezésére, célszerű az optimális torzulásokat csak a sűrűbben lakott területekre koncentrálni. Így például $p = 1$,



2. ábra. Legjobb valódi hengervetületek φ_H függvényében ($p = 0,7$)

$\varphi_H = 60^\circ$ választásával megközelítőleg Behrmann vetületét kapjuk. Javaslatom oka, hogy ha egy vetület a térképtükör optikai középpontjában nagy torzulásokkal rendelkezik, akkor az az egész térkép esztétikáját elrontja, hiába kedvezőbb az egész területet tekintve.

Irodalom

Airy, George Biddell (1861): „Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the earth's surface; and comparison of this projection with other projections”. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical

Magazine and Journal of Science 22/149, 409–421. old.

Bajeva, Je. Ju. (1987): „Kriterii ocenki dosztainsztva kartograficeszkih projekcij, iszproluzemih dlja szosztavlenija kart Mira”. Geogyezija i aerofotozjomka 3, 109–112. old.

Čapek, Richard (2001): „Which is the best projection for the world map”. Proceedings of the 20th international Cartographic Conference. Vol. 5, 3084–3093. old.

Frančula, Nedjeljko (1971): „Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie”. PhD diss. Reinischen Friedrich Wilhelms Universität, Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät

Grafarend, E.–Niermann, A. (1984): „Beste echte Zylinderabbildungen”. Kartographische Nachrichten 3/84, 103–107. old.

Györfy János (1990): „Anmerkungen zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen”. Kartographische Nachrichten 4/90, 140–146. old.

– (2012): Térképészet és geoinformatika II. Térképvetületek. ELTE Eötvös Kiadó

Hazay István (1964): Vetülettan. Tankönyvkiadó

Kavrajcszkij, Vlagyimir V. (1934): Matematiceszkaja kartografija. Redbaza Goszkartotreszta, M.–L.

Klinghammer István (2015): „A kartográfia alapjairól: a térképvetületek kezdetei”. Geodézia és Kartográfia 67/7–8, 14–19. old.

Kósa András (1970): Variációszámítás. Tankönyvkiadó

Summary

The Best Cylindrical Projection for Large Areas

The author describes how to calculate the optimal formulas of cylindrical projections for small-scale maps by analytical means. The obtained projection has the least distortion possible among cylindrical projections according to Krovavsky's criterion. The ratio of areal and angular distortions of this projection can be adjusted to the map thematic. It is proven, that the standard parallel of the best cylindrical projection is independent of this prescribed ratio, it is only a function of the mapped spherical segment.



Kerkovits Krisztián
doktorandusz

ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék
e-mail: kerkovitskrisztian@gmail.com